Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
M.Sc. Thor Wittich

Einführung in die Topologie, WiSe 21/22
Blatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Zeigen Sie, dass die Bündelprojektion eines Faserbündels eine offene Identifizierung ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Ist jede Überlagerung einer Mannigfaltigkeit erneut eine Mannigfaltigkeit?

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung mit wegzusammenhängendem Totalraum Y. Angenommen, p habe einen globalen Schnitt, d.h. es existiere eine stetige Abbildung $s\colon X \to Y$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_X$. Zeigen Sie, dass dann p bereits ein Homöomorphismus sein muss.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

(i) Der Quotient $\mathbb{CP}^n$ von $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ bzgl. der Gruppenwirkung

$$S^1 \times S^{2n+1} \to S^{2n+1},\ (u, z) \mapsto uz$$

wird n-dimensionaler projektiver Raum über $\mathbb{C}$ genannt. Zeigen Sie, dass $\mathbb{CP}^1$ homöomorph zu S^2 ist.

(ii) Überlegen Sie sich nun, dass die Quotientenabbildung $q\colon S^3 \to \mathbb{CP}^1$ ein Faserbündel $p\colon S^3 \to S^2$ mit Faser S^1 liefert.

(iii) Ist das Faserbündel p trivial?